

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f : \text{Pol}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Pol}_2(\mathbb{R}), \quad p(x) \mapsto x\alpha p'(x) + 2p(x)$$

- a) Man zeige, daß die Abbildung für jedes feste $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Endomorphismus von $\text{Pol}_2(\mathbb{R})$ ist.
- b) Man bestimme die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis $1, x, x^2$.
- c) Man bestimme alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die f ein Automorphismus ist und gebe in den anderen Fällen jeweils eine Basis von $\text{Kern}(f)$ an.

Hinweis: Zur Wiederholung: Ein Endomorphismus ist eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$, d.h. ein Vektor $v \in V$ wird unter der linearen Abbildung f wieder nach V abgebildet. Ein Automorphismus ist ein bijektiver Endomorphismus. Überlegen Sie sich, was bei Teilaufgabe a) und c) zu zeigen ist.

2. Betrachten Sie noch einmal den auf dem 2. Tutoriumsblatt angegebenen Endomorphismus

$$\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ x - z \\ x - y \end{pmatrix}.$$

- a) Geben Sie die Abbildungsmatrix A der linearen Abbildung π bezüglich der kanonischen Basis an.
- b) Zeigen Sie unter Verwendung der bereits gezeigten Eigenschaft $\pi(\pi(x)) = \pi(x)$, für alle $x \in \mathbb{R}^3$, dass die Eigenwerte von A nur die Werte 0 oder 1 annehmen können.
- c) Berechnen Sie den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$.
Hinweis: Wiederholen Sie die Definition von $\text{Eig}(A, \lambda = 0)$. Kennen Sie diese Menge aus einem anderen Kontext?
- d) Zeigen Sie, dass

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ sind.

3. Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Gegeben seien weiterhin die drei Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix B von f bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3 .

4. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A .

Hinweis:

Sie müssen die Nullstellen eines Polynoms 3.Grades bestimmen. Falls das Polynom nicht faktorisiert vorliegt, finden Sie durch systematisches Raten eine Nullstelle. Durch Faktorisieren der 1.Nullstelle reduziert sich das Problem auf ein Polynom 2.Grades.

Eine systematischere und elegantere Lösung besteht darin, die Matrix, dessen Determinante gebildet wird, auf Zeilenstufenform umzuformen. Die Nullstellen können dann direkt abgelesen werden. (Wieso?)